Elements correction Application 4.

Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{|x^2-1|}\right)$

- 2 problèmes : ln et fraction

1) ln : il faut que $\dfrac{x+2}{|x^2-1|} > 0$

$\Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

2) fraction : il faut que $|x^2-1| \neq 0 \rightarrow x^2-1 \neq 0$

$(x-1)(x+1) \neq 0$

$x \neq 1$ et $x \neq -1$

Donc $D_f =]-2\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

ou $]-2\,;+\infty[\setminus \{-1\,;1\}$

2) Par composition de fonctions continues sur ~~..~~ leur domaine de def et dérivable, f est continue et dérivable sur son D_f.

D_f = Dom limite

• Sur $]-2 ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

on a $f_1(x) = \ln(x+2) - \ln(x^2-1)$

$$f_1'(x) = [\ln(x+2)]' - [\ln(x^2-1)]'$$

$u = x+2 \qquad u' = 1 \qquad || \qquad u = x^2-1 \qquad u' = 2x$

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2-1-2x(x+2)}{(x+2)(x^2-1)}$$

$$= \frac{-x^2-4x-1}{(x+2)(x^2-1)} = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x^2-1)} = \frac{-x^2+4x+1}{(x+2)(x^2-1)}$$

$\Delta = 16-4 = 12 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3} \notin D_f \\ \\ x_2 = -2+\sqrt{3} \in D_f. \end{cases}$$

	-2		-1	$-2+\sqrt{3}$	1		$+\infty$
$f_1'(x)$	||	$+$	|| 0	//////	0 ||	$-$	

signe de a à l'extérieur des racines $(-x^2$ ici$)$

- f est continue donc dérivable sur son D_f.
  Or, les points $x = 1$ et $x = -1$ ne sont pas définies, donc pas continues, donc pas dérivables

Rappel : définie → continue → dérivable

alors $D_{dérivable} = D_{continue} = D_{déf}$.

3) f par morceaux :

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x+1) = 0$$
$$x = 1 \text{ et } x = -1$$

	-2		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$x^2 - 1$		$-x^2 + 1$		$x^2 - 1$	
alors		$\underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)}_{f_1}$		$\underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{1-x^2}\right)}_{f_2}$		$\underbrace{\ln\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)}_{f_2}$	

4) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{|x^2-1|}\right) = \ln(x+2) - \ln|x^2-1|$

sur I_2 : $]-1 ; 1[$

$$f(x) = f_2(x)$$

$$f_2'(x) = [\ln(x+2)]' - [\ln(1-x^2)]'$$

$$= \frac{1}{x+2} - \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$= \frac{1-x^2+2x(x+2)}{(x+2)(1-x^2)} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)(1-x^2)}$$

même Δ et mêmes solutions $\begin{cases} x_1 = -2+\sqrt{3} \in D_f \\ x_2 = -2-\sqrt{3} \end{cases}$

x	-2		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
f_2'	$\|\|$	//////	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	//////	

ainsi,

x	-2		-1		$-2+\sqrt{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	

- $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \underbrace{\ln(x+2)}_{-\infty} - \underbrace{\ln(x^2-1)}_{\ln 3}$

donc $\lim\limits_{-2^+} f(x) = -\infty$

- $\lim\limits_{-1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \ln(x+2) - \underbrace{\ln(x^2-1)}_{\underbrace{\ln 0}_{\underbrace{-\infty}_{-(-\infty)}}}$

donc $\lim\limits_{-1^-} f(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{+1} f(x) = \lim\limits_{+1} \ln(x+2) - \ln(x^2-1) = \ln 3 - \ln(x^2-1)$
$-(-\infty) = +\infty$

On a 3 AV en $x = -2$; $x = -1$ et $x = 1$

en $+\infty$: $f(x) \to -\infty$, on regarde $\frac{f(x)}{x}$

or $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(x+2)}{x} - \frac{\ln x^2 - 1}{x} = 0$ par CC.

La branche parabolique de direction (ox).
en $+\infty$.

7) $f(-2+\sqrt{3}) = \ln(-2+\sqrt{3}+2) - \ln\left[(-2+\sqrt{3})^2 - 1\right]$

$$= \ln\sqrt{3} - \ln(4 - 4\sqrt{3} + 3 - 1)$$

$$= \ln\sqrt{3} - \ln(6 - 4\sqrt{3})$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{6 - 4\sqrt{3}}\right)$$

8)